INSTITUTO SUPERIOR DE TRANSPORTES E COMUNICAÇÕES

1º TESTE DE

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

ENUNCIADO

Curso: Licenciatura em Engª Electrotécnica — **Data:** 19/04/2024

Turma: LEE11 — **Pontuação:** 200Pts

Ano lectivo: 2024 – 1º Semeste — **Duração:** 100 minutos

Docente: Amade Monteiro

1. **[15 + 15 Pontos]** Dado o número complexo $z = 1 - i$
   (a) Determine z^4;
   (b) Calcule a raiz quadrada de z.

2. **[20 Pontos]** Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} x+y & x-2y \\ m-n & 3m+n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$, Ache os valores de x, y, m e n para que se tenha $A^t = B$

3. **[10 + 10 Pontos]** Uma matriz $A \in M_{3\times3}$ tem a seguinte propriedade $a_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 2 & se\ i \neq j \end{cases}$ e uma matriz $B \in M_{3\times3}$ tem a seguinte propriedade $b_{ij} = \begin{cases} i+j & se\ i = j \\ i-j & se\ i \neq j \end{cases}$
   (a) Construa as matrizes A e B
   (b) Calcule $A.B$

4. **[40 Pontos]** Seja $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, Calcule o determinante da matriz C

5. **[30 Pontos]** Determine a inversa da Matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

6. **[30 Pontos]** Considere o sistema $\begin{cases} -2x - ky + z = -2 \\ -x + 3z = 3 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$. Usando o método de Gauss-Jordan, faça a discussão do sistema em função do parâmetro k.

7. **[30 Pontos]** Resolva pelo método da matriz inversa, o SEL seguinte:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Bom Trabalho!

Correção Teste 1 - ALGA - 2024

1. $Z = 1 - i$

$Z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = 2\pi - \arctan\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$

$\theta = 2\pi - \arctan\left|-\frac{1}{1}\right|$

$\theta = 2\pi - \arctan 1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$

$Z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right)$

a) $Z^4 = ?$

$Z^n = r^n.(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$Z^4 = \sqrt{2}^4.\left(\cos 4.\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,4.\frac{7}{4}\pi\right)$

$Z^4 = 4(\cos 7\pi + i\,\text{sen}\,7\pi)$

b) $\sqrt{Z} = ?$

$Z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

$Z_k = \sqrt{2}^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi k}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi k}{2}\right)$

Para $k = 0$, $Z_0 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7}{8}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{8}\pi\right)$

Para $k = 1$, $Z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi}{2}\right)$

$Z_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{15}{8}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{15}{8}\pi\right)$

2. $A = \begin{bmatrix} x+y & x-2y \\ m-n & 3m+n \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{bmatrix} x+y & m-n \\ x-2y & 3m+n \end{bmatrix}$

$A^t = B \Rightarrow \begin{bmatrix} x+y & m-n \\ x-2y & 3m+n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$

$-\begin{cases} x+y=8 \\ x-2y=-1 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} m-\cancel{n}=6 \\ 3m+\cancel{n}=10 \end{cases}$

$4m = 16$

$m = 4$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=8 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

$3y = 9$

$y = 3$

$x+y=8$

$\Rightarrow x = 8-3$

$x = 5$

$m-n=6$

$-n = 6-4$

$n = 2$

$\text{Sol}: \begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ m=4 \\ n=-2 \end{cases}$

3.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

b) $A \cdot B = \begin{bmatrix} 2+2+4 & -1+8+2 & -2-2+12 \\ 4+1+4 & -2+4+2 & -4-1+12 \\ 4+2+2 & -2+8+1 & -4-2+6 \end{bmatrix}$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 8 \\ 9 & 4 & 7 \\ 8 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

4.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pelo desenvolvimento da 5ª coluna temos:

$$|C| = 1 \cdot (-1)^{3+5} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo a 3ª linha temos

$$|C| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Aplicando Sarrus temos

$$|C| = 3 \cdot \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right| = 3 \cdot \left[-24+4+0-(-32+9+0)\right]$$

$$= 3(-20-(-23)) = 3(-20+23)$$

$$= 3 \cdot 3$$

$$= 9.$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = l_2 - l_1 \\ L_3 = l_3 + l_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 = l_2/(-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 = l_1 + 4l_2 \\ L_3 = l_3 - 2l_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] L_1 = l_1 + 3l_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ∎

6. $\begin{cases} -2x - ky + z = -2 \\ -x + 3z = 3 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -k & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right] L_3 = l_3 + l_2 \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -k & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & k-3 & 4 \end{array}\right] L_2 = 2l_2 - l_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -k & 1 & -2 \\ 0 & k & 5 & 8 \\ 0 & 2 & k-3 & 4 \end{array}\right] L_3 = k l_3 - 2 l_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -k & 1 & -2 \\ 0 & k & 5 & 8 \\ 0 & 0 & k^2-3k-10 & 4k-16 \end{array}\right]$$

1.º Para que o SEL seja compatível e determinado

$r(A) = r([A|B]) = 3$

$k^2 - 3k - 10 \neq 0$

$(k+2)(k-5) \neq 0$

$k \neq -2 \wedge k \neq 5$ logo, $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$

2.º para que o SEL seja compatível e indeterminado

$r(A) = r([A|B]) < 3$

$k^2 - 3k - 10 = 0 \wedge 4k - 16 = 0$

$k = -2 \vee k = 5 \wedge k = 4$ logo, não é possível.

3.º Para que o SEL seja impossível

$r(A) \neq r([A|B])$

$k^2 - 3k - 10 = 0 \wedge 4k - 16 \neq 0$

$k = -2 \vee k = 5 \wedge k \neq 4$ Sol: $k = \{-2, 5\}$

7. $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$A^{-1} = ?$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = l_2 - 2l_1 \\ L_3 = l_3 - 3l_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 = l_2/(-3) \\ L_3 = l_3/(-4) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3/4 & 0 & -1/4 \end{array}\right] L_3 = l_3 - l_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 1/3 & -1/4 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 = l_1 - 3l_3 \\ L_2 = l_2 - l_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3/4 & -1 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 & -2/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 1/3 & -1/4 \end{array}\right] L_1 = l_1 - 2l_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/12 & 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 7/12 & -2/3 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/12 & 1/3 & -1/4 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/12 & 1/3 & 1/4 \\ 7/12 & -2/3 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/12 & 1/3 & 1/4 \\ 7/12 & -2/3 & 1/4 \\ 1/12 & 1/3 & -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{Sol: } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$ #